Θεωρία στην Άλγεβρα

1) Τι ονομάζουμε **μονώνυμο-συντελεστή-κύριο μέρος- βαθμό μονωνύμου**
2) Ποια μονώνυμα λέγονται α) **όμοια** β) **ίσα** γ) **αντίθετα**
3) Ποιο **μονώνυμο** ονομάζεται α)**σταθερό** β) **μηδενικό**
4) Πως ορίζεται το **άθροισμα** και πως το **γινόμενο** μονωνύμων;
5) Ποιο **πολυώνυμο** λέμε α)**σταθερό** β) **μηδενικό**;
6) Τι ονομάζουμε: α)**πολυώνυμο –διώνυμο- τριώνυμο** β) **βαθμό πολυωνύμου**
7) Πως ορίζεται ο πολλαπλασιασμός α) **μονωνύμου** με **πολυώνυμο**
   β) **πολυωνύμου** με **πολυώνυμο**
8) Τι ονομάζουμε **ταυτότητα**;
9) Αποδείξτε τις ταυτότητες:
   Α) τετράγωνο αθροίσματος $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
   Β) τετράγωνο διαφοράς $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
   Γ) κύβος αθροίσματος $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
   Δ) κύβος διαφοράς $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
   Ε) γινόμενο αθροίσματος με διαφορά $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

10) Τι ονομάζουμε **Παραγοντοποίηση**;
11) Τι ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** και τι **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
12) Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται **ρητή** και πότε αυτή **δεν** ορίζεται;
13) Τι ονομάζεται **εξίσωση 2^{ου} βαθμού** με έναν άγνωστο;
14) Πότε μια **εξίσωση 2^{ου} βαθμού** με έναν άγνωστο έχει:
    α) δύο λύσεις άνισες
    β) μια διπλή λύση
    γ) δεν έχει λύσεις

15)Πως **παραγοντοποιείται** το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ όταν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει λύσεις τις x_1, x_2;

16) Τι ονομάζεται **κλασματική** εξίσωση και **πότε ορίζεται** αυτή;

Θεωρία στη Γεωμετρία

1. Ποια τα **κύρια** στοιχεία του τριγώνου;
2. Ποια τα **είδη** των τριγώνων ως προς τις **πλευρές** και ως προς τις **γωνίες** τους;
3. Τι ονομάζεται **διάμεσος** ,**διχοτόμο**ς ,**ύψος** τριγώνου;
4. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται **ίσα**; (ορισμός)
5. Πότε δύο τρίγωνα **είναι** ίσα;(κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων)
6. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα **είναι** ίσα;(κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων)
7. Ποια είναι η **χαρακτηριστική ιδιότητα** των σημείων της **μεσοκαθέτου** ευθυγράμμου τμήματος;
8. Ποιά είναι η **χαρακτηριστική ιδιότητα** των σημείων της **διχοτόμου** μιας γωνίας;
9. Τι γνωρίζετε **γενικά** για τον **λόγο** δύο ευθυγράμμων τμημάτων;
10. Τι ξέρετε για το ευθύγραμμο τμήμα που **συνδέει τα μέσα** δύο πλευρών τριγώνου
11. Με τι είναι ίση η **διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα** ενός ορθογωνίου τριγώνου;
12. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται **όμοια**; (ορισμός)
13. Πότε δύο τρίγωνα είναι **όμοια**; **(κριτήρια ομοιότητας τυχαίων τριγώνων)**
14. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με την βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων
15. Τι γνωρίζετε για τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω
16. Τι γνωρίζετε για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών
17. Αποδείξτε τις **βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες** δηλαδή ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει
    - ✓ $ημ^2ω + συν^2ω = 1$
    - ✓ $εφω = \frac{ημω}{συνω}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

1. **Μονώνυμο** λέγεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία ανάμεσα στις μεταβλητές σημειώνεται μόνο πολλαπλασιασμός
   Συντελεστής είναι ο αριθμητικός παράγοντας
   Κύριο μέρος είναι το γινόμενο των μεταβλητών με τους αντίστοιχους εκθέτες
   Βαθμός ενός μονωνύμου ως προς μια μεταβλητή λέγεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.
2. **α)Όμοια** είναι τα μονώνυμα με **ίδιο κύριο μέρος.**
   β)Ίσα είναι τα **όμοια** μονώνυμα με **ίδιο συντελεστή.**
   γ)Αντίθετα είναι τα όμοια μονώνυμα με **αντίθετους συντελεστές.**
3. **α)Σταθερό μονώνυμο** λέμε οποιονδήποτε αριθμό
   β)Μηδενικό μονώνυμο λέμε το σταθερό μονώνυμο **μηδέν.**
4. **Άθροισμα** **<u>ΟΜΟΙΩΝ</u>** μονωνύμων είναι ένα όμοιο με αυτά μονώνυμο με συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών.
   Γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με **συντελεστή** το γινόμενο των συντελεστών και **κύριο** μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της .
5. **α)Σταθερό πολυώνυμο** λέγεται κάθε αριθμός .
   β)Μηδενικό πολυώνυμο λέγεται ο αριθμός μηδέν.
6. **Πολυώνυμο** λέγεται μια αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα τουλάχιστον δύο μη όμοιων μονώνυμων.
   Διώνυμο είναι το πολυώνυμο που έχει δύο **μη** όμοιους όρους.
   Τριώνυμο είναι το πολυώνυμο που έχει τρεις **μη** όμοιους όρους.
7. α) Για να πολλαπλασιάσουμε **μονώνυμο με πολυώνυμο,** πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυώνυμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν .
   β) Για να πολλαπλασιάσουμε **πολυώνυμο με πολυώνυμο ,** πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυώνυμου με κάθε όρο του άλλου πολυώνυμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.
8. **Ταυτότητα** λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

9. ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ

- $\mathbf{(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha+\beta\cdot\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$

- $\mathbf{(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha\cdot\alpha-\alpha\cdot\beta-\beta\cdot\alpha+\beta\cdot\beta=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$

- **$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta) = (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2).(\alpha+\beta) =$**
  $\alpha^2.\alpha+ \alpha^2.\beta +2\alpha\beta\alpha+2\alpha\beta\, \beta+ \beta^2\, \alpha+ \beta^2.\beta=$
  $\alpha^3+ \alpha^2.\beta +2\, \alpha^2.\beta +2\alpha\, .\, \beta^2 + \beta^2.\alpha+ \beta^3=$
  $\alpha^3+3\, \alpha^2.\beta +3\alpha\, .\, \beta^2 + \beta^3$

- **$(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2.(\alpha-\beta) = (\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2).(\alpha-\beta) =$**
  $\alpha^2.\alpha- \alpha^2.\beta -2\alpha\beta\alpha+2\alpha\beta\, \beta+ \beta^2\, \alpha-\beta^2.\beta=$
  $\alpha^3- \alpha^2.\beta -2\, \alpha^2.\beta +2\alpha\, .\, \beta^2 + \beta^2.\alpha- \beta^3=$
  $\alpha^3-3\, \alpha^2.\beta +3\alpha\, .\, \beta^2 - \beta^3$

- **$(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) =\alpha\cdot\alpha-\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha-\beta\cdot\beta=\alpha^2-\beta^2$**

10. **Παραγοντοποίηση** λέγεται η διαδικασία με τη οποία μια παράσταση που **είναι άθροισμα** , μετατρέπεται **σε γινόμενο** παραγόντων .

11. **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** δύο η περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων ονομάζεται το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.
Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης δύο η περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων ονομάζεται το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

12. **Ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή** παράσταση λέγεται μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα .
Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης **δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρανομαστής της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρανομαστή μηδέν.**

13. **Εξίσωση 2ου βαθμού ή δευτεροβάθμια εξίσωση** λέμε την εξίσωση με έναν άγνωστο που ο μεγαλύτερος εκθέτης του **χ** είναι το **2**

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με ένα άγνωστο x είναι

$$\alpha x^2 + \beta\chi + \gamma = 0 \quad \mu\varepsilon\ \alpha \neq 0$$

- **Συντελεστές** της εξίσωσης λέγονται οι αριθμοί α, β, γ
- **Σταθερός όρος** της εξίσωσης λέγετε ο συντελεστής γ
- Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ είναι **2ου** βαθμού όταν **$\alpha \neq 0$**
- Ο αριθμός ρ είναι **λύση** ή ρίζα της εξίσωσης , όταν **την επαληθεύει.**

14.Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Η παράσταση **$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$** λέγεται διακρίνουσα της εξίσωσης.

- Αν **Δ > 0**, τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις $\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν **Δ = 0**, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση την $\chi = \frac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν **Δ < 0**, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (**αδύνατη)**

15.Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta\chi+\gamma$ με $\alpha\neq0$ **παραγοντοποιείται** ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑΣ ΔΗΛΑΔΗ

- Αν **Δ > 0**, τότε **$\alpha x^2+\beta\chi+\gamma = \alpha(\chi-\chi_1).(\chi-\chi_2)$**
- Αν **Δ = 0**, τότε **$\alpha x^2+\beta\chi+\gamma = \alpha(\chi-\chi_1).(\chi-\chi_1) = \alpha(\chi-\chi_1)^2$**
- Αν **Δ < 0**, τότε **δεν παραγοντοποιείται**

16.Κλασματική εξίσωση ονομάζεται η εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον ένα κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή

Ορίζεται όταν **εξαιρέσουμε** τις τιμές του αγνώστου που θα μηδένιζαν τους παρονομαστές αφού πρώτα τους **παραγοντοποιήσουμε**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ στη Γεωμετρία

1. Τα **κύρια** στοιχεία του τριγώνου είναι οι κορυφές, οι πλευρές του και οι γωνίες του

2. Τα **είδη** των τριγώνων

- ως προς τις **πλευρές** είναι **ισόπλευρο , ισοσκελές και σκαληνό** και
- ως προς τις **γωνίες** είναι **ορθογώνιο** ,**αμβλυγώνιο** και **οξυγώνιο.**

3. Τα **δευτερεύοντα** στοιχεία του τριγώνου είναι τα ύψη, οι διάμεσοι και οι διχοτόμοι

Διάμεσος τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή με το **μέσο** της απέναντι πλευράς.

Δ**ιχοτόμο**ς τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από μια κορυφή χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσα μέρη και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.

Ύ**ψος** τριγώνου είναι η απόσταση μιας κορυφής από την απέναντι πλευρά.

4. Δύο τρίγωνα λέμε ότι είναι ίσα, όταν έχουν τις πλευρές τους ίσες **μία προς μία** και τις **αντίστοιχες** γωνίες ίσες.

5. Τα κριτήρια ισότητας τριγώνων είναι:

1ο Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία τους, ίση ,τότε είναι ίσα (π-γ-π)

2ο Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στη πλευρά αύτη γωνίες ίσες μια προς μια ,τότε είναι ίσα(γ-π-γ).

3ο Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μια προς μια τότε είναι ίσα(π-π-π).

6. Τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων είναι:

i. **Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μια προς μια τότε είναι ίσα.(π-π)**
ii. **Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια αντίστοιχη πλευρά και μια αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα (π-γ).**

7. Κάθε σημείο της **μεσοκαθέτου** ευθυγράμμου τμήματος **ισαπέχει** από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος και **αντίστροφα** κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

8. Κάθε σημείο της **διχοτόμου** γωνίας **ισαπέχει** από τις πλευρές της γωνίας και **αντίστροφα** κάθε σημείο που **ισαπέχει** από τις πλευρές μιας γωνίας ανήκει στη διχοτόμο της.

9. Ο λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

10. Το ευθύγραμμο τμήμα που **συνδέει τα μέσα** δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της.

11. Η **διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα** ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της.

12. Δύο τρίγωνα λέμε ότι είναι **όμοια,** όταν έχουν τις πλευρές τους **ανάλογες** και τις **αντίστοιχες** γωνίες τους **ίσες.**

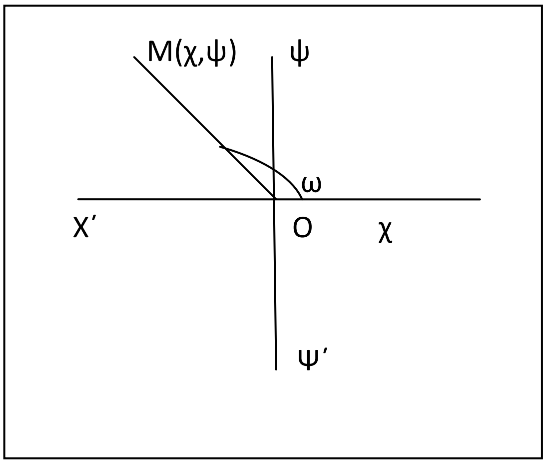
13. Τα κριτήρια ομοιότητας τυχαίων τριγώνων είναι:

i. Δύο τρίγωνα λέμε ότι είναι όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.
iii. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία είναι ίση είναι όμοια.

14. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω ορίζονται με την βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων ως εξής:

Έστω τυχαίο σημείο του επιπέδου Μ(χ,ψ)

$$\boldsymbol{\eta\mu\omega} = \frac{\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\varepsilon\nu\eta \ \tau o\upsilon \ M}{\alpha\pi\acute{o}\sigma\tau\alpha\sigma\eta \ \tau o\upsilon \ M \ \alpha\pi\acute{o} \ \tau o \ O} = \frac{\psi}{\rho}$$



$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\varepsilon\nu\eta \ \tau o\upsilon \ M}{\alpha\pi\acute{o}\sigma\tau\alpha\sigma\eta \ \tau o\upsilon \ M \ \alpha\pi\acute{o} \ \tau o \ O} = \frac{\chi}{\rho}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\varepsilon\nu\eta \ \tau o\upsilon \ M}{\tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\varepsilon\nu\eta \ \tau o\upsilon \ M} = \frac{\psi}{\chi}$$

Όπου ρ $=\sqrt{x^2 + \psi^2}$

15. Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημω, συνω, εφω ισχύουν:

Στο πρώτο τεταρτημόριο **ό**λοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί
Στο δεύτερο τεταρτημόριο μόνο το **η**μίτονο είναι θετικό.
Στο τρίτο τεταρτημόριο η **ε**φαπτομένη είναι θετική.
Στο τέταρτο τεταρτημόριο το **σ**υνημίτονο είναι θετικό.

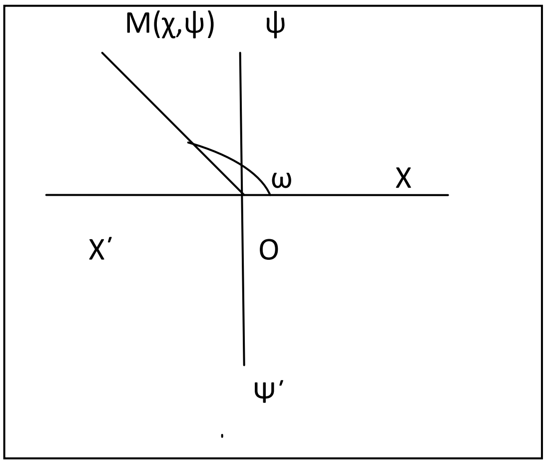
16. Οι παραπληρωματικές γωνίες ω, φ= 180^o – ω έχουν το **ίδιο ημίτονο** και **αντίθετους** τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς .Δηλαδή

- ημ(180^o – ω) = ημω
- συν(180^o – ω) = - συνω
- εφ(180^o – ω) = - εφω

17. Απόδειξη **βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων** για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει

✓ $\boxed{ημ^2ω+ συν^2ω=1}$

$$ημ^2ω+ συν^2ω=\left(\frac{\psi}{\rho}\right)^2+\left(\frac{\chi}{\rho}\right)^2=\frac{\psi^2}{\rho^2}+\frac{\chi^2}{\rho^2}=\frac{\psi^2+\chi^2}{\rho^2}=\frac{\rho^2}{\rho^2}=1$$



✓ $\boxed{εφω=\frac{ημω}{συνω}}$

$$\frac{ημω}{συνω}=\frac{\frac{\psi}{\rho}}{\frac{\chi}{\rho}}=\frac{\psi\,\rho}{\chi\,\rho}=\frac{\psi}{\chi}=εφω$$

<u>Μην ξεχνάτε</u>

ω	30^o	45^o	60^o
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$